

TD 1 : Logique Indications

Dans tout ce TD : P , Q et R sont des assertions qui peuvent éventuellement dépendre d'une ou plusieurs variables, et E est un ensemble quelconque.

Opérateurs logiques

1 ★ On suppose que P , Q et R sont fausses.

- 1) Est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
- 2) Même question pour $P \implies (Q \implies R)$. Que remarque-t-on ?

- 1) Raisonner étape par étape : est-ce que $P \implies Q$ est vraie ? Par suite, est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
- 2) Idem.

2 ★★ Écrire la négation des assertions suivantes :

- 1) $\text{non } P$ et Q
- 2) P ou $(Q \implies R)$
- 3) $P \implies (Q \implies R)$
- 4) $P \iff Q$

Traiter l'exercice étape par étape. Par exemple pour la 2, si on pose l'assertion $Q_1 : "Q \implies R"$, alors on cherche la négation de P ou Q_1 . Que vaut cette négation ? Puis il faut tout exprimer en fonction de P , Q et R .

3 ★★

- 1) Montrer que " $P \implies Q$ " équivaut à " $\text{non } P$ ou Q " en utilisant une table de vérité.
- 2) Faire de même sans utiliser de table de vérité.

- 1) La méthode est identique à celle vue en cours.
- 2) Comment peut-on exprimer $\text{non}(P \implies Q)$? En déduire le résultat demandé.

4 ★★ On définit l'opérateur logique "ouex" pour désigner le "ou exclusif". Ainsi, " P ouex Q " est vrai si l'une des deux assertions est vraie mais pas l'autre. Si non, " P ouex Q " est fausse.

- 1) Dresser la table de vérité de " P ouex Q ".
- 2) En déduire une expression simple de la négation de " P ouex Q ".
- 3) Donner une assertion équivalente à " P ouex Q " en utilisant uniquement les connecteurs logiques "et", "ou" et "non".

- 1) Partir de la définition de l'énoncé.
- 2) Ajouter et remplir la colonne " $\text{non}(P \text{ ouex } Q)$ " dans la table de vérité.
- 3) Partir de la définition de l'énoncé.

Quantificateurs

5 ★ Est-ce que les assertions suivantes sont vraies ? Aucune justification n'est attendue.

- $P : (\exists x \in \mathbb{R} \quad x + 1 = 0) \text{ et } (\exists x \in \mathbb{R} \quad x - 2 = 0)$
- $P' : \exists x \in \mathbb{R} \quad (x + 1 = 0 \text{ et } x - 2 = 0)$
- $Q : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0 \text{ ou } x \neq 1)$
- $Q' : (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1)$

6 ★★ Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

- 1) $\exists p \in \mathbb{Z} \quad p \text{ est pair et } p \text{ est premier}$
- 2) $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 + y + 1 > 0$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \implies x^2 < 9$
- 4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 4x \geq 0 \implies (x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2)$
- 5) $\exists ! u \in \mathbb{R} \quad u^3 + u = 0$

7 ★★ Les propositions logiques suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- $P : \forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq y$
- $Q : \forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq y$
- $R : \exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x^2 \leq y$

8 ★★ (Quantificateur $\exists$!) L'assertion suivante affirme qu'il y a **unicité** (mais pas forcément existence) d'un élément de E qui vérifie un prédicat P :

$$\forall x_1, x_2 \in E \quad (P(x_1) \text{ et } P(x_2)) \implies x_1 = x_2$$

- 1) Exprimer l'assertion " $\exists! x \in E \quad P(x)$ " en utilisant uniquement les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ et les opérations logiques.
- 2) En déduire la négation de " $\exists! x \in E \quad P(x)$ ".

$\exists! x \in E \quad P(x)$ signifie qu'on a existence ET unicité : traduire l'existence et traduire l'unicité séparément puis les combiner avec le ET.

9 ★★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$. Exprimer verbalement ("en français") la signification des assertions suivantes :

- 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq 0$
- 2) $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$
- 3) $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$
- 4) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad u_n = M$

Essayer de reformuler en langage naturel. Chaque assertion correspond à une propriété typique d'une fonction. Attention, une assertion est "piégeuse"...

10 ★★★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

- 1) f s'annule au moins une fois sur I .
- 2) f est la fonction nulle.
- 3) f présente un minimum.
- 4) f est une fonction constante.
- 5) f est majorée.

Commencer par se représenter l'assertion finale, qui dépendra de plusieurs paramètres. Par exemple, pour " f est majorée", il est naturel de considérer une assertion de la forme :

$$\dots\dots\dots f(x) \geq M$$

où les " $\dots\dots\dots$ " doivent être remplis avec des quantificateurs bien choisis.

11 ★★★ Dans cet exercice, on notera P_x et Q_x au lieu de $P(x)$ et $Q(x)$. Compléter les lignes ci-dessous avec $\implies$, $\Leftarrow$, $\iff$ selon ce qui est le plus approprié :

- 1) $\forall x \in E \quad P_x \text{ et } Q_x \dots\dots (\forall x \in E \quad P_x) \text{ et } (\forall x \in E \quad Q_x)$
- 2) $\forall x \in E \quad P_x \text{ ou } Q_x \dots\dots (\forall x \in E \quad P_x) \text{ ou } (\forall x \in E \quad Q_x)$
- 3) $\exists x \in E \quad P_x \text{ et } Q_x \dots\dots (\exists x \in E \quad P_x) \text{ et } (\exists x \in E \quad Q_x)$
- 4) $\exists x \in E \quad P_x \text{ ou } Q_x \dots\dots (\exists x \in E \quad P_x) \text{ ou } (\exists x \in E \quad Q_x)$

On ne demande pas de justifier. Prendre le temps de reformuler en langage "naturel" chaque assertion. Vous pouvez confirmer votre intuition avec des exemples.

Raisonnements (sauf analyse-synthèse)

12 ★ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.

Il faut procéder par récurrence, et on voit que la relation de récurrence qui définit u_{n+2} fait intervenir deux termes : u_{n+1} et u_n . Quel type de récurrence cela encourage à faire ?

13 ★★ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n(n^2 + 1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Raisonner par disjonction de cas, selon la parité de n .

14 ★★ Soit a et b deux entiers. Montrer que si $a + b$ et ab sont pairs, alors a et b sont pairs.

L'énoncé est de la forme "Si ... alors ...". On demande en fait de montrer une implication.

15 ★★ On considère la propriété $P_n : 8^n + 2$ est multiple de 7.

- 1) Montrer que P_n est héréditaire, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \implies P_{n+1}$.
- 2) Est-ce que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? Moralité ?

■ C'est essentiellement un exercice de rédaction.

16 ★★ Soit x un réel (quelconque). Démontrer l'assertion :

$$x = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$$

■ Raisonner par double implication. Une implication est facile. Pour prouver l'autre, raisonner par contraposée.

17 ★★ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , l'entier $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.

■ À ce stade de l'année, il est interdit d'utiliser la formule de factorisation de $a^n - b^n$! On pourra utiliser une réécriture astucieuse...

18 ★★ On considère 3 réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

Montrer qu'on a $x_2 - x_1 \leq \frac{1}{2}$ ou $x_3 - x_2 \leq \frac{1}{2}$.

■ Raisonner par l'absurde.

19 ★★ Montrer que pour tout entier naturel pair, le nombre $(n+1)^2 - 1$ est un multiple de 8.

■ Vous verrez assez facilement que $(n+1)^2 - 1$ est un multiple de 4. On remarque ensuite que ce qu'on souhaite démontrer équivaut à montrer que $\frac{(n+1)^2 - 1}{4}$ est un multiple de 2.

20 ★★ Soit a et b deux réels. Montrer que si l'équation $ax + b = 0$ (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) admet une infinité de solutions, alors $a = 0$.

■ On vous demande de montrer une implication. On peut donc par exemple raisonner par contraposée. Autre possibilité : raisonner par l'absurde.

21 ★★★ Montrer que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

La somme ou la différence de deux rationnels est encore un rationnel

Soit q un rationnel et r un irrationnel. Pour montrer que $q + r$ est irrationnel, raisonner par l'absurde.

22 ★★ Que penser de la preuve suivante ?

Affirmation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: Dans une boîte de n crayons, tous les crayons sont de la même couleur.

Preuve : Quand $n = 1$, l'assertion est trivialement vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons l'assertion vraie pour n crayons. Parmi $n + 1$ crayons, les n premiers sont donc de la même couleur, et les n derniers aussi. Donc les $n + 1$ crayons sont de la même couleur. Ainsi par récurrence, l'assertion est vraie pour tout n dans $\mathbb{N}^*$. □

■ L'affirmation est évidemment fausse, il y a une faille dans la preuve. Essayer de voir à partir de quel valeur de n la preuve ne fonctionne pas...

23 ★★★ Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p m$ avec $p \in \mathbb{N}$ et m un entier naturel impair.

■ Pour l'hérédité, lorsqu'il faut étendre la propriété à l'entier $n + 1$, on peut distinguer les cas où $n + 1$ est pair et où $n + 1$ est impair.

24 ★★★★★ (*Rallye mathématique d'Alsace 2013*) Jean attribue à chaque nombre entier strictement positif une et une seule couleur, soit bleue, soit rouge. Pour cela, il suit la règle suivante : si trois nombres (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur. On sait que la couleur rouge a été attribuée au nombre 58 et que la couleur bleue a été attribuée de nombreuses fois. Quelle couleur a été attribuée au nombre 40 ? Et au nombre 2026 ?

■ La règle "si trois nombres (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur" va contraindre la couleur de beaucoup de nombres : les plus grands nombres seront contraints par les plus petits. Ainsi, on peut appeler x la couleur de 1, et y la couleur de 2 (on peut avoir $x = y$). À partir de cela, déduire des nombres dont la couleur est imposée comme étant x ou y .

Il faut ensuite continuer ce processus avec des petits nombres dont la couleur est encore inconnue, et enfin raisonner par disjonction de cas sur x , y et d'autres couleurs inconnues éventuelles.

———— **Raisonnement par analyse-synthèse** ————

25 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x - y) = x - f(y)$$

Déterminer $f(0)$.

26 ★★ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Déterminer $f(0)$.

27 ★★ Montrer que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\forall x \in E \quad f(x) = g(x) + c$$

avec c un réel et $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\int_0^1 g(t)dt = 0$.

Trouver d'abord c , la fonction g peut ensuite s'en déduire.